UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 6, Ausgabe 29.11.2011, Abgabe und Besprechung am 6.12.2011

1. **Die Monte Carlo Methode** *10 Punkte*
Die Monte Carlo Methode ist ein statistisches Verfahren, um (hochdimensionale) Integrale numerisch mit Hilfe von speziell gewählten Punkten, sogenannten Samples auszuwerten. Unterschieden wird dabei die triviale Methode, das Direct Sampling und die effezientere, der Metropolis Algorithmus. Im Folgenden soll zunächst die Monte Carlo Methode an einem einfachen Beispiel diskutiert werden: Wir betrachten ein Quadrat mit den Kantenlängen eins. In dem Quadrat sei ein Kreis mit Durchmesser eins einbeschrieben.

   (a) Direct Sampling
   Seien nun $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N$ N zweidimensionale Zufallsvektoren mit Wertebereich in $[0,1] \times [0,1]$, also innerhalb des Quadrates. Die Zahlen entstammen einem Zufallsgenerator der auf $[0,1] \times [0,1]$ gleichverteilte unabhängige Zufallszahlen produziert.
   Wir definieren nun
   $$A_N := 4\,\frac{(\text{Zahl der } \mathbf{x}_i \text{ im Kreis})}{N}.$$
   Was ist der Limes von A_N für $N \to \infty$?
   Wie verhält sich der Fehler oder die Abweichung von diesem Grenzwert mit N?
   Hinweis: Zusammenhang der Standardabweichung mit N

   (b) Der Metropolis Algorithmus
   Wir modifizieren nun den Algorithmus für A_N folgendermaßen:

   1) Wähle eine (beliebige) Startposition $\mathbf{x}_0$ innerhalb des Kreises.

   Wiederhole nun die folgenden beiden Schritte von $i = 0$ bis $i = N$

   2) Ziehe eine zufällige Verschiebung um $\Delta\mathbf{x}$.
   3) Ist $\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}$ innerhalb des Quadrats so akzeptieren wir die Verschiebung und setzen $\mathbf{x}_{i+1} := \mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}$.
   Im anderen Fall, (Ablehnung) setzen wir $\mathbf{x}_{i+1} := \mathbf{x}_i$.
   Setze $i := i + 1$

   A_N erhalten wir dann wie in a).

   Begründen Sie warum es sich bei dem beschriebenen Prozess um eine Markovkette handelt?
   Welche Bedingungen sollte man an $|\Delta\mathbf{x}|$ stellen?
   Hinweis: Überlegen Sie sich was für $|\Delta\mathbf{x}| \ll 1$ und $|\Delta\mathbf{x}| \approx 1$ passiert.

(c) Programmieren
Schreiben Sie ein Programm, dass Ihnen A_N mit der Methode aus a) und aus b) berechnet.
Setzen Sie $N = 4000$ und plotten Sie die $\mathbf{x}_i$ in beiden Fällen. Setzen Sie in b) einmal $|\Delta\mathbf{x}| = 1/2$ und dann $|\Delta\mathbf{x}| = 1/20$.
Welche Vorteile hat man von der Markovkette? (Nicht nur auf dieses Beispiel bezogen.)

(d) Mikroreversibilität
Erfüllt der stochastische Prozess, der durch die Markov-Kette beschrieben wird, die Bedingugn der Mikroreversibilität ('detailed balance')? Überlegen Sie sich wie man die Markov-Kette abändern kann um die Mikroreversibilität zu zerstören.

(e) Importance Sampling
Wir berechnen nun das (eindimensionale) Integral

$$I(\gamma) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^\gamma = \frac{1}{\gamma + 1} \text{ für } 0 > \gamma > -1$$

mit einer Monte-Carlo Methode, um eine weitere Verbesserung der Methode kennenzulernen.
Schreiben Sie ein Programm, das

$$I(\gamma) = \int_0^1 x^\gamma \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^\gamma}{\rho(x)} \rho(x) \mathrm{d}x \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^\gamma$$

mit $\gamma = -0.8$, $N = 10000$ berechnet. x_i seien dabei auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen ($\rho(x) = const. = 1$).
Plotten Sie den Integranden mit der Verteilung $\rho(x)$. Was ist problematisch an diesem Sampling?
Setzen sie nun $\rho(x) = (1 + \zeta)x^\zeta$ und berechnen Sie wiederum mit Direct Sampling

$$I(\gamma) = \frac{1}{1+\zeta} \int_0^1 \mathrm{d}x\, \rho(x) x^{\gamma-\zeta} = \frac{1}{1+\zeta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^{\gamma-\zeta}.$$

Hinweis: Die Letzte Gleichheit geht davon aus, dass die x_i gemäß $(1 + \zeta)x_i^\zeta$ verteilt sind! Zeigen Sie, dass wenn x_i eine gleichverteilte Zufallszahl aus $[0, 1]$ ist, so ist $x_i^{1/(1+\zeta)}$ verteilt wie $(1 + \zeta)x_i^\zeta$. Mit diesen Zufallszahlen können Sie die Summe auswerten.
Setzen Sie dabei $\zeta = -0.7$. Plotten Sie den Integranden mit der Verteilung $\rho(x)$. Wieso funktioniert dieses Sampling besser?