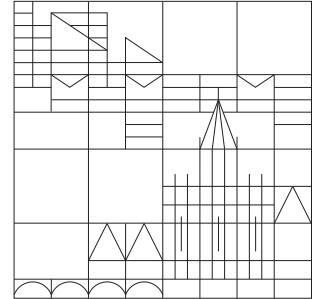


UNIVERSITÄT KONSTANZ  
 Fachbereich Physik  
 Prof. Dr. Matthias Fuchs  
 Raum P 907, Tel. (07531)88-4678  
 E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de  
 PD Dr. Rudolf Haussmann  
 E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de



Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse  
 mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,  
 Wintersemester 2011/12

**Übungsblatt 4**, Ausgabe 15.11.2011, Abgabe und Besprechung am 22.11.2011

1. **Langevin Gleichung** (4 Punkte)

Die Brownsche Molekularbewegung war zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch immer ein Rätsel. Albert Einstein lieferte 1905 eine Erklärung und gleichzeitig eine Bestätigung der Atom-Theorie, indem er aufzeigte, dass suspendierte Teilchen, getrieben von den Kollisionen mit den Atomen der Flüssigkeit, genau solche Brownsche Bewegungen ausführen müssen. Er stellte dabei folgende Formel für das arithmetische Mittel der Quadrate der Verückung im Limes  $t \rightarrow \infty$  auf:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

wobei  $D$  der Diffusionskoeffizient ist.

Langevin präsentierte drei Jahre später eine intuitiv einleuchtende Bewegungsgleichung. Darin kamen zwei Kräfte vor: Zunächst eine Reibungskraft, proportional zur Geschwindigkeit und dem Vorfaktor  $-6\pi\eta\sigma$ . Dabei ist  $\eta$  die Viskosität der Flüssigkeit und  $\sigma$  der Durchmesser des (näherungsweise) kugelförmigen Teilchens. Die zweite Kraft ist eine stochastische Größe  $f_s$ , die die atomaren Kollisionen darstellt.

- (a) Stellen Sie die Langevin-Gleichung auf und zeigen Sie, dass sie in folgenden Ausdruck umgeformt werden kann:

$$\frac{1}{2}m \frac{d^2}{dt^2}x^2 - m\dot{x}^2 = -3\pi\eta\sigma \frac{d}{dt}x^2 + x f_s$$

Was sind sinnvolle Annahmen für  $\langle f_s(t) \rangle$  und  $\langle f_s(t)f_s(0) \rangle$ ?

- (b) Zeigen Sie dass

$$\frac{1}{2}m \frac{d^2}{dt^2}\langle x^2 \rangle + 3\pi\eta\sigma \frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = k_B T$$

indem sie mitteln,  $\langle x f_s \rangle = 0$  annehmen und außerdem den Gleichverteilungssatz benutzen.

Finden Sie die Lösung für  $\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle$ .

- (c) Betrachten Sie dann den Limes  $6\pi\eta\sigma/m \gg 1$  und finden Sie dann den Zusammenhang

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta\sigma},$$

die Einsteinrelation. Dies ist ein Beispiel für das Fluktuations-Dissipationstheorem, das die Diffusion mit der Viskosität verbindet.

- (d) Was bedeutete die Annahme  $\langle x f_s \rangle = 0$ ? Wann oder unter welchen Umständen ist die Vereinfachung zulässig? Berechnen Sie  $\langle v f_s \rangle$ .

## 2. Brownsche Bewegung im Gravitationsfeld (4 Punkte)

Die Brownsche Bewegung im Gravitationsfeld, die sogenannte Sedimentation, wurde zuerst von Chandrasekhar 1943 untersucht, und ist immer noch ein aktives Forschungsgebiet der Kolloidphysik. In dieser Aufgabe soll nun ein einzelnes diffundierendes Teilchen betrachtet werden, wobei die Relevanz der Randbedingungen bei einer solchen partiellen Differentialgleichung eindrücklich zu Tage tritt.

- (a) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort  $\mathbf{r}$  eines Kolloids zur Zeit  $t$  ist durch die Smoluchowski-Gleichung gegeben

$$\frac{\partial P(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 P(\mathbf{r}, t) + \mathbf{K} \cdot \nabla P(\mathbf{r}, t)$$

wobei  $D$  die Diffusionskonstante und  $\mathbf{K} = (0, 0, Dmg/(k_B T))$  mit  $m$  der Teilchenmasse und  $g$  der Beschleunigung aufgrund der Gravitation. Die Gravitation wirkt also in die  $z$ -Richtung.

Benutzen Sie die Methode der Separation der Variablen um Folgendes zu zeigen:

$P(\mathbf{r}, t) = f(x, t)f(y, t)w(z, t)$  mit

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right],$$

und für  $w(z, t)$  gilt:

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} + c \frac{\partial w(z, t)}{\partial z}$$

mit  $c = Dmg/(k_B T)$ . Da die Diffusion in der  $xy$ -Ebene durch die Gravitation nicht beeinflusst wird, betrachten wir nur noch die Bewegung in  $z$ -Richtung.

- (b) Die Ausgangshöhe des Teilchens sei  $z_0 > 0$  und eine undurchlässige Wand sei in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0$ . Dies sei die Begrenzung für das Teilchen. Wieso sind folgende Randbedingungen sinnvoll?

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \delta(z - z_0) & t &\rightarrow 0 \\ D \frac{\partial w}{\partial z} + cw &= 0 & z = 0 & t > 0 \end{aligned}$$

Substituieren Sie  $w(z, t) = U(z, t) \exp[-c(z - z_0)/(2D) - c^2 t/(4D)]$  um eine einfachere Gleichung für  $U(z, t)$  zu erhalten. Wie lauten die entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen für  $U(z, t)$ .

- (c) Die Randbedingung erschwert die Lösung der Differentialgleichung für  $U(t, z)$ , die noch analytisch möglich ist

$$\begin{aligned} U(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left( \exp\left[-\frac{(z - z_0)^2}{4Dt}\right] + \exp\left[-\frac{(z + z_0)^2}{4Dt}\right] \right) \\ &+ \frac{c}{D\sqrt{4\pi Dt}} \int_{z_0}^{\infty} dz' \exp\left[-\frac{(z' + z)^2}{4Dt} + \frac{c(z' - z_0)}{2D}\right] \end{aligned}$$

Teile der Lösung erhält man, indem man die Methode der Bildladungen, bekannt aus der Elektrostatik, analog anwendet.

Verifizieren Sie, dass die angegebene Lösung die Randbedingungen erfüllt. Bestimmen Sie die Lösung des eigentlichen Problems  $w(z, t)$  und machen Sie eine Skizze für verschiedene Zeiten. Im Limes  $t \rightarrow \infty$  erhalten Sie die bekannte Gleichgewichtsverteilungslösung. Wie lautet damit die mittlere Höhe des Teilchens im Gleichgewicht?