UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 2, Ausgabe 03.11.2011, Abgabe und Besprechung am 08.11.2012

1. **Zentraler Grenzwertsatz**

Der zentrale Grenzwertsatz ist sehr fundamental und spielt eine wichtige Rolle in theoretischer und experimenteller Physik. Der Satz besagt, dass die Summe von n stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen annähernd normalverteilt für $n \to \infty$ ist. Wir betrachten n gleichverteilte stochastische Variablen ξ_i mit Mittelwert $\bar{\xi}$ und Abweichung σ^2. Die Variable

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})$$

hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P_\eta(y) = \int d^n x P_n(\mathbf{x})\, \delta \left(y - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\xi}) \right)$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass für unabhängige und gleichverteilte ξ_i die ‘Charakteristische Funktion’ (d.h. die Fourier-Transformierte von $P_\eta(y)$) gegeben ist durch

$$\phi_\eta(k) = \left[\exp\left(-\frac{ik\bar{\xi}}{\sqrt{n}} \right) \int dx P_1(x) \exp\left(-\frac{ikx}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

$P_1(x)$ ist die Verteilung einer einzelnen Variable.

(b) Verwenden Sie die Kumulantenentwicklung der Charakteristische Funktion

$$\phi_\xi \left(k/\sqrt{n} \right) = \int dx P_1(x) \exp\left(-\frac{ikx}{\sqrt{n}} \right)$$

um zu zeigen, dass für $n \to \infty$

$$\phi_\eta(k) = \exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2} \right)$$

gilt. Nehmen Sie hierbei an, dass alle Kumulanten $\langle \xi^l \rangle_c$ endlich sind. Eine Fourier Rücktransformation liefert das gewünschte Ergebnis

$$P_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right)$$

(c) Wie lautet die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte von $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ für große n?

2. **Poisson Verteilung**
Betrachtet wird ein Prozeß aus unabhängigen zufälligen Ereignissen mit konstanter Ereignisrate. Solche sind zum Beispiel Regentropfen, die während eines zeitlich konstanten Regens auf ein Dachfenster auftreffen oder die Zerfälle einer radioaktiven Substanz. Die Wahrschlichkeit, dass in einem Zeitintervall t genau n Ereignisse auftreten, ist durch die Poisson-Verteilung $P_n(t)$ gegeben.

Es seien die Voraussetzungen gegeben, dass die Anzahl der Ereignisse im Intervall $[T, T+t]$ (mit $t > 0$) unabhängig sei von T ("Stationarität") und von der Zahl der Ereignisse im Intervall $[0, T]$ ("Markowsch"). Ausserdem enthalte ein infinitesimales Intervall $[T, T+dt]$ maximal ein Ereignis.

Speziell werde ein Dachfenster betrachtet, auf das zufällig Regentropfen fallen. Die einzelnen Regentropfen sind unabhängig voneinander, die mittlere Anzahl von Tropfen pro Zeiteinheit ist λ.

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, im Zeitintervall $[0, t]$ keinen Tropfen zu beobachten, gegeben ist durch

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass im infinitesimalen Intervall dt ein Tropfen aufschlägt, ist gegeben durch $\lambda\, dt$. Erklären und verwenden Sie, dass gilt

$$P_0(t+dt) = P_0(t)\,(1 - \lambda\, dt).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P_n(t+dt)$, genau $n > 0$ Tropfen im Zeitfenster $[0, t+dt]$ zu zählen, der folgenden Gleichung genügt:

$$P_n(t+dt) = P_n(t)(1 - \lambda dt) + P_{n-1}(t)\lambda\, dt. \qquad (1)$$

Hinweis: Begründen und verwenden Sie die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$P_n(t+dt) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t) P_k(dt)$$

unter Ausnutzung einer der oben genannten Eigenschaften und entwickeln Sie P_0 und P_1 für $dt \to 0$.

(c) Berechnen Sie die Poisson-Verteilung $P_n(t)$. Lösen Sie dazu die gekoppelten Differentialgleichungen, die man aus Gleichung (1) für $dt \to 0$ erhält, mit dem Ansatz $P_n(t) = v_n(t) e^{-\lambda t}$ und bestimmen Sie die $v_n(t)$ rekursiv. Wie lauten die Anfangsbedingungen?

(d) Zeigen Sie die Normierung $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$, und berechnen Sie Mittelwert $\langle n \rangle$ und Varianz $\langle n^2 \rangle$-$\langle n \rangle^2$ der Tropfenzahlen; welcher Zusammenhang besteht?