UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 11, Ausgabe 17.01.2012, Abgabe und Besprechung am 24.1.2012

1. **Projektionsoperatoren** (*4 Punkte*)
In der Anwendung stochastischer Prozesse trifft man oft auf die Situation, dass einzelne stochastische Variablen schnell und andere langsam fluktuieren. Projektionsoperatoren erlauben dann, vergröberte Gleichungen für die langsamen Variablen aufzustellen. Gegeben sei ein System mit N Gleichungen für N Variablen $a_i(t)$. Das Ziel ist einen Teil der Variablen zu eliminieren um eine 'reduzierte' Beschreibung zu erhalten. Betrachten Sie den einfachsten Fall mit zwei Variablen $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t))$ deren Zeitentwicklung durch die Matrix (den Operator) $\mathbf{L}$ mit Komponenten L_{ij} durch

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{a}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}(t).$$

gegeben ist.

(a) Es wird angenommen, dass die relevante Variable $a_1(t)$ ist. Zeigen Sie, dass obige Gleichung äquivalent ist zu

$$\frac{\partial}{\partial t}a_1(t) = L_{11}a_1(t) + L_{12}\int_0^t ds \exp[L_{22}(t-s)]L_{21}a_1(t) + L_{12}\exp[L_{22}t]a_2(0).$$

Interpretieren Sie die Bedeutung der drei Terme auf der rechten Seite. Ist die Gleichung für $a_1(t)$ markoffsch?

(b) Diese Vorgehensweise kann formalisiert werden indem man Projektionsoperatoren benutzt, die die Dynamik des Systems auf die relevanten Variablen projezieren. Sei nun $\mathbf{P}$ der Operator auf die relevante Variable a_1 mit den Komponenten $P_{ij} = \delta_{i1}\delta_{j1}$. Schreiben Sie die Gleichung für $a_1(t)$ um indem Sie den Projektor $\mathbf{P}$ und sein Komplement $\mathbf{1} - \mathbf{P}$ benutzen. $\mathbf{1} - \mathbf{P}$ projeziert auf den irrelevanten Unterraum.

(c) Betrachten Sie nun große Zahl N von Variablen. Der Projektionsoperator auf die relevanten Variablen A ist dann explizit durch
$\mathbf{P}B = (B, A) \cdot (A, A)^{-1} \cdot A = \sum_{j,k}(B, A_j)((A, A)^{-1})_{jk}A_k$ gegeben, wobei (B, A_j) ein Vektor und $((A, A)^{-1})_{jk}$ eine Matrix sei. Teilen Sie den Liouville Operator in zwei Teile $L = \mathbf{P}L + (\mathbf{1} - \mathbf{P})L$ auf und benutzen Sie die Operatoridentität
$\exp[Lt] = \exp[(\mathbf{1} - \mathbf{P})Lt] + \int_0^t ds \exp[L(t-s)]\mathbf{P}L\exp[(\mathbf{1} - \mathbf{P})Ls]$ um

$$\frac{\partial}{\partial t}A(t) = i\Omega \cdot A(t) - \int_0^t ds\mathbf{K}(s) \cdot A(t-s) + F(t),$$

zu zeigen.
Nehmen Sie an, dass L antihermitesch ist, also $(LA, B)^* = -(B, LA)$ und die Definition $i\Omega = (LA, A) \cdot (A, A)^{-1}$, $\mathbf{K}(t) = -(LF(t), A) \cdot (A, A)^{-1}$ und $F(t) = \exp[(\mathbf{1} - \mathbf{P})Lt](\mathbf{1} - \mathbf{P})LA$.
Diskutieren Sie den Ursprung und die Bedeutung von $F(t)$ und $\mathbf{K}(t)$ in diesem Resultat.

(d) Betrachten Sie ein Einzelteilchen, das an ein Wärmebad bestehend aus harmonischen Oszillatoren ankoppelt. Der Hamiltonian des Systems ist dann gegeben durch

$$H = H_E + H_W = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + U(x)}_{:=H_E} + \underbrace{\sum_j \left(\frac{p_j^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_j^2 \left(q_j - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2} x \right)^2 \right)}_{:=H_W}.$$

Dabei sind $\{q_j\}$ die Ortskoordinaten und $\{p_j\}$ die Impulse des Wärmebades und x, p die Ortskoordinate und der Impuls des Einzelteilchens. Zur Vereinfachung ist die Masse der Badteilchen zu Eins gesetzt. Weiter ist ω_j die Frequenz des j-ten Oszillators und γ_j die Stärke der Kopplung. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Variablen q_j, p_j, x, p auf.

(e) Leiten Sie die Langevin Gleichung

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -U'(x) - \int_0^t \mathrm{d}s\, K(s) \frac{p(t-s)}{m} + F_p(t)$$

mit $K(t) = \sum_j \frac{\gamma_j^2}{\omega_j^2} \cos \omega_j t$ und $F_p(t) = \sum_j \gamma_j p_j(0) \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j} + \sum_j \gamma_j \left(q_j(0) - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2} x(0) \right) \cos \omega_j t$ her.

(f) Zeigen Sie, dass $\langle F_p(t) \rangle = 0$ und $\langle F_p(t) F(t') \rangle = k_B T K(t - t')$ gilt. Nehmen Sie dazu die kanonische Verteilung $\propto \exp[-H_W / k_B T]$ für das Wärmebad an.
Hinweis: Es gilt $\left\langle \left(q_j(0) - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2} x(0) \right)^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{\omega_j^2}$ *und* $\langle (p_j(0))^2 \rangle = k_B T$
Führen Sie die Markoffnäherung $K(t) \approx \Gamma \delta(s)$ durch. Was erhalten Sie?

2. **Bewertung einer Anleihe:** (*4 Punkte*)
Betrachtet wird eine Anleihe mit einer Laufzeit von N Jahren. Der Nominalwert der Anleihe ist 1000 Euro. Zur Zeit $t = 0$ wird die Anleihe ausgegeben, zu den Zeiten $t = 1, \ldots, N$ wird jeweils der Zins $z = 5\,\%$ gezahlt, insgesamt N mal. Zur Zeit $t = N$ wird der Nonimalwert der Anleihe wieder zurückgezahlt. Die Kapitalkosten einer Anleihe in dieser Risikoklasse seien r.

(a) Überlegen Sie sich, welche Cashflows C_t der Anleger in den Jahren $t = 1, \ldots, N$ erhält. Berechnen Sie den Barwert der Anleihe W_t zu allen Zeiten $t = 0, \ldots, N$ für $N = 15$ und für die drei Fälle $r = 3\,\%$, $5\,\%$ und $7\,\%$. Stellen Sie die Ergebnisse in einem Diagramm graphisch dar.

(b) Was passiert mit dem Barwert der Anleihe, wenn der Leitzins (die Kapitalkosten) r steigt oder fällt? Schließen Sie daraus, dass eine Anleihe einen Kurswert besitzt.

(c) Wie hängt der Kurswert von der Restlaufzeit der Anleihe $\Delta t = N - t$ ab?

(d) Die Anleihe wurde von einem Staat ausgegeben, der gerade auf eine Pleite zusteuert. An der Börse fällt der Kurswert der Anleihe auf 500 Euro. Ermitteln Sie mit Hilfe der Formel von (a) den Zinssatz r, der einen solchen Kurswert rechtfertigt, wenn die Restlaufzeit der Anleihe $\Delta t = N - t = 5$, 10 oder 15 Jahre beträgt.